Εισαγωγή στην Τοπολογία

Στοιχειοθεσία-Απαντήσεις: Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

e-mail: kdimoglou@onlymaths.gr

Πρόκειται για τις απαντήσεις των δύο πρώτων ασκήσεων στο μάθημα «Εισαγωγή στην Τοπολογία» του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων (Ημ/νια: 19/2/2021).

Εκφώνηση: Έστω μετρικός χώρος (X, ρ). Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $d, \sigma \colon X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \quad \text{και} \quad \sigma(x,y) = \min\{1, \rho(x,y)\}, \ \ x, y \in X$$

είναι μετρικές στο X.

Απάντηση

Θα αποδείξουμε ότι η d είναι μετρική στο X. Αρχικά από τον τρόπο που ορίζεται η d και λόγω ότι η ρ είναι μετρική του X, έπεται ότι

$$d(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \in [0,1), \ \text{ για κάθε } x, y \in X$$

και

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y.$$

Επίσης, από την συμμετρική ιδιότητα της ρ, έπεται άμεσα η συμμετρική ιδιότητα για την d, δηλαδή,

$$d(x,y) = d(y,x), \ \text{ για κάθε } x, y \in X.$$

Τέλος, μένει να αποδείξουμε ότι ισχύει η τριγωνική ανισότητα για τη d. Έστω λοιπόν $x, y, z \in X$ και θα αποδείξουμε ότι

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Αν $x = y = z$, τότε προφανώς ισχύει το ζητούμενο ως ισότητα.

(ii) Αν $x \neq y = z$, τότε $d(y,z) = 0$ και $d(x,z) = d(x,y)$. Οπότε, ισχύει πάλι το ζητούμενο ως ισότητα.

(iii) Αν $x = y \neq z$, είναι συμμετρικό του (ii), δηλαδή ισχύει ξανά το ζητούμενο ως ισότητα.

(iv) Αν $x = z \neq y$, τότε $d(x,z) = 0$ και προφανώς ισχύει η ζητούμενη ανισότητα (γνήσια).

(v) Αν $x \neq y \neq z \neq x$, τότε $\rho(x,z) \neq 0$, $\rho(x,y) \neq 0$ και $\rho(y,z) \neq 0$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} \leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}.$$

Εφόσον $\rho(x,z) \neq 0$ διαιρώντας στη $d(x,z)$ αριθμιτή και παρονομάστη με $\rho(x,z)$, έχουμε ότι

$$d(x,z) = \frac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,z)}}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα για τη μετρική ρ, έχουμε

$$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$$

ή

$$\frac{1}{\rho(x,z)} \geq \frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

ή

$$1 + \frac{1}{\rho(x,z)} \geq 1 + \frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)}$$

ή

$$\begin{aligned} d(x,z) = \frac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,z)}} &\leq \frac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)}} = \frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} \\ &= \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)} \\ &\leq \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} + \frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)} = d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Τώρα θα αποδείξουμε ότι η σ είναι μετρική X. Είναι προφανές ότι $\sigma(x,y) \in [0,1]$, για κάθε $x,y \in X$, $\sigma(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ και $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$, για κάθε $x,y \in X$. Έστω $x,y,z \in X$ και θα αποδείξουμε ότι

$$\sigma(x,z) \leq \sigma(x,y) + \sigma(y,z).$$

Εφόσον

$$\sigma(x,y) = \begin{cases} 1 & , \ 1 \leq \rho(x,y) \\ \rho(x,y) & , \ 1 > \rho(x,y) \end{cases},$$

και επειδή ομοίως ορίζονται και οι $\sigma(x,z)$ και $\sigma(y,z)$ συνολικά έχουμε να εξετάσουμε 2^3 δυνατές περιπτώσεις. Διακρίνουμε λοιπόν τις εξής:

(i) Αν $1 \leq \rho(x,y)$ ή $1 \leq \rho(y,z)$, τότε $\sigma(x,y) = 1$ και $\sigma(y,z) = 1$. Από τον ορισμό της σ προκύπτει

$$\sigma(x,z) \leq 1 \leq 1 + 1 = \sigma(x,y) + \sigma(y,z).$$

(σε αυτή την περίπτωση καλύψαμε $2 \cdot 3 = 6$ δυνατές περιπτώσεις)

(ii) Αν τώρα δεν ισχύει η (i), δηλαδή, $1 > \rho(x,y)$ και $1 > \rho(y,z)$, τότε $\sigma(x,y) = \rho(x,y)$ και $\sigma(y,z) = \rho(y,z)$. Από τον ορισμό της σ και την τριγωνική ανισότητα για την ρ προκύπτει

$$\sigma(x,z) \leq \rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) = \sigma(x,y) + \sigma(y,z).$$

(σε αυτή την περίπτωση καλύψαμε $2 \cdot 1 = 2$ δυνατές περιπτώσεις)